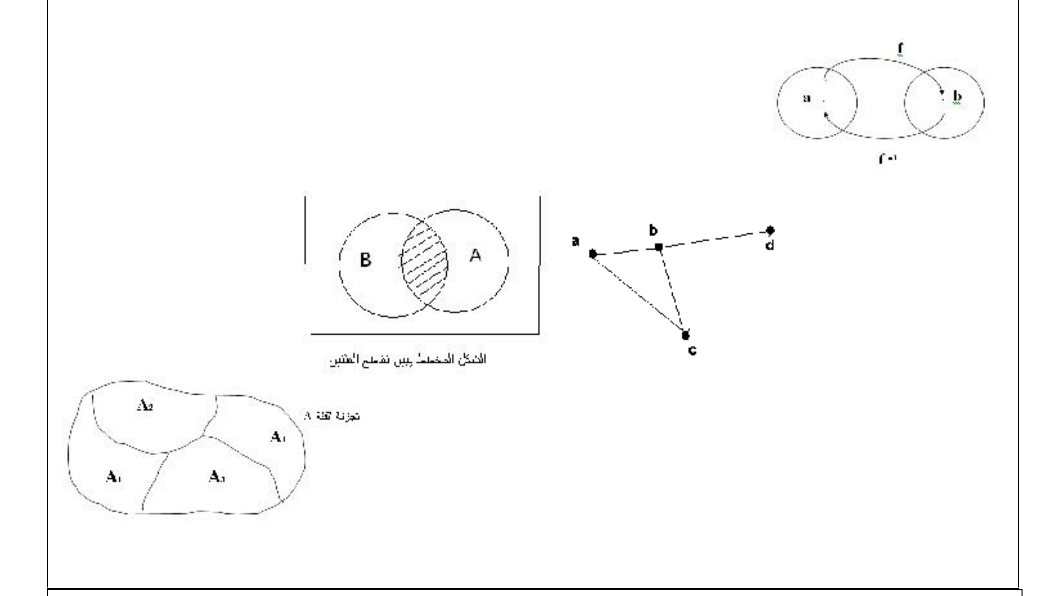
التراكيب المنفصلة

Discrete Structures



إعداد

د. عمر محمد زرتي

أستاذ بقسم الحاسوب

كلية العلوم، جامعة الفاتح، طرابلس

تمهيد

تعتبر مادة (التراكيب المنفصلة) أو ما يعرف باللغة الانجليزية ب (discrete structures) من المواد الأساسية في علم الحاسوب، فهي مادة متفق على أهمية وجودها في أي برنامج دراسي يؤدي إلى منح شهادة جامعية في علم الحاسوب، في معظم جامعات العالم إن لم يكن جميعها.

والحقيقة أنه يوجد أكثر من هدف من تدريس (التراكيب المنفصلة). ومن أهم هذه الأهداف أنها تهيء لطالب علم الحاسوب الأسس الرياضية المتينة التي يحتاج إليها عند دراسة المواد المتقدمة في علم الحاسوب مثل (تراكيب البيانات) و(خوارزميات الحاسوب)،َاضافة الى أنها تعلمهم كيف يفكرون بطريقة رياضية منطقية.

ونظرا للنقص الشديد في المراجع العربية في هذا الموضوع ، فقد رأيت أنه من الضروري إعداد هذا الكتاب لمساعدة الأستاذ والطالب في العملية التعليمية لمادة (التركيب المنفصلة).

وهنا تواجه اعداد الكتاب مشكلة المواضيع التي يجب أن نركز عليها في هذه المادة، والسبب هو أن مجال هذه المادة واسع ويحتوي على العديد من المواضيع، وهناك اختلافات في وجهات نظر المختصين في هذا المجال. ولكني بعد الاطلاع على عدد من مناهج الجامعات العالمية، وبالخصوص كتاب كنث روزن Kenneth Rosen(وهو مرجع أساسي لهذا الكتاب):

Discrete Mathematics and Its Applications

وجدت أنه من الأنسب أن أتبع التسلسل التالي:

1. علم المنطق
2. الفئات
3. الدوال
4. المتواليات
5. الاستنتاج الرياضي
6. طرق العد

7. العلاقات
8. الأشكال
9. الأشجار

وأعتقد أن في هذا التسلسل ما يكفي أو يزيد عن الوعاء الزمني لفصل دراسي كامل (حوالي 14 أسبوعا بواقع ساعتين نظري وساعتين عملي).
والدروس العملية في هذه المادة مهمة ، فهي تعمق فهم الطالب للدروس النظرية، وتعطيه خبرة أكثر في البرمجة بصفته متخصصا في علم الحاسوب. وفي هذه الدروس يكتب الطالب برامج بلغة باسكال أو سي أو غيرها مثل:

- برامج تطبع جداول الصدق للمؤثرات المنطقية.
- برامج تحسب العمليات على الفئات مثل التقاطع والاتحاد وغير ذلك.
- برامج لحساب الدوال
- برامج تحسب مجموع متوالية مع المقارنة بالقانون
- برامج لحساب التوافيق والتباديل
- برامج لاختبار نوع العلاقة

ويتميز الكتاب بعدد كبير نسبيا من التمارين مع حل كامل لها في نهاية الكتاب.

أملي أن يجد طلاب هذا المقرر في هذا الكتاب معينا لهم في دراستهم للتراكيب المنفصلة، مستفيدين من تعدد الأمثلة والتمارين والاختبارات المحلولة. والله نسأل التوفيق للجميع.

د. عمر زرتي
طرابلس - ليبيا

الفهرس

الباب الأول : المنطق Logic

الباب الثاني : الفـئــــات Sets

الباب الثالث: الدوال Functions

الباب الرابع: المتواليات Sequences

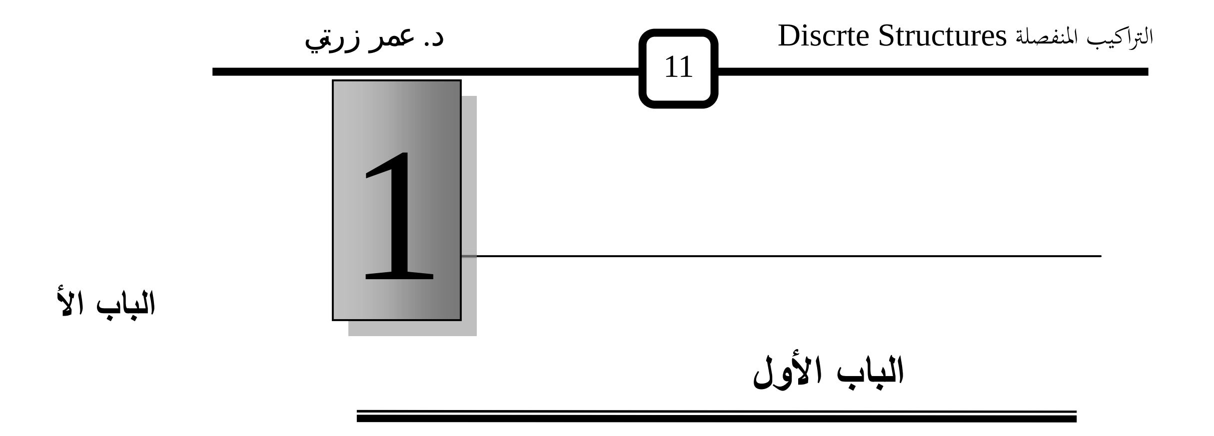
الباب الخامس: الاستنتاج الرياضي
Mathematical Induction

الباب السادس : طرق العد Counting

الباب السابع : العلاقات Relations

الباب الثامن : الأشكال Graphs

الباب التاسع : الأشجار Trees



الباب الأول

المنطق Logic

إذا حاول أحد أن يقنعك بشيء ما أو يبرهن نظرية ما فإنه يستعمل المنطق للوصول إلى هدفه. ولكن كيف تعرف أن أسلوبه "منطقي" وأنه يتبع قواعد المنطق التي تبين كيف يمكن استنتاج الخلاصة من الفرضيات بطريقة سليمة؟
هذا ما تفيدنا به دراسة هذا الباب.

1.1 الفرضية المنطقية proposition

الفرضية (أو العبارة المنطقية) هي جملة مفيدة قابلة لأن تكون إما صائبة TRUE أو خاطئة FALSE .

مثال(1): تعتبر الجمل التالية عبارات منطقية (فرضيات):

a) القاهرة عاصمة مصر.

b) $1 + 1 = 2$

c) القمر أكبر من الشمس.

d) المثلث له أربعة أضلاع.

e) اليوم عيد ميلادي.

الفرضية الأولى والثانية صائبتان، أي أن قيمة كل منهما تساوي True ، أما الفرضية الثالثة والرابعة فهي خاطئة أي أن قيمتها False. أما الفرضية الخامسة فيمكن أن تكون صائبة أو خاطئة بناء على متى تم قولها.

مثال(2) : هل العبارات التالية تعتبر فرضية proposition ؟

a) ما اسمك ؟

b) اقرأ هذا الكتاب.

c) كلية العلوم.

هذه العبارات لاتعتبر فرضيات propositions لأنها ليست جمل مفيدة . بصورة عامة فإن جمل الاستفهام والتعجب والأمر لاتعتبر فرضيات منطقية.

1.2 المتغيرات المنطقية Logical Variables

المتغير المنطقي هو متغير قيمته إما True أو False، ونستخدمه كرمز للعبارة المنطقية باستخدام حرف واحد ، وعادة ما نستخدم الأحرف:

$$p , q , r , s , ..$$

لهذا الغرض .

كما تستخدم الاختصار

T = True
F = False

كقيم لهذه المتغيرات.

وبستخدم المتغير المنطقي في بعض لغات البرمجة مثل لغة باسكال حيث يسمى متغير بوولي Boolean variable نسبة إلى العالم الرياضي جورج بوول George Boole مؤسس علم الجبر المنطقي.

مثال : ما هي قيم المتغيرات المنطقية p و q في الجمل التالية بلغة باسكال :

p := (2>1) ;
q : = (3=4) ;

الإجابة هي أن المتغير المنطقي p تتعين له قيمة True أما المتغير المنطقي q فتتعين له القيمة False .

1.3 المؤثرات المنطقية Logical Operators

استخدام المؤثرات المنطقية logical operators يساعدنا في تبسيط كتابة الجمل المنطقية المعقدة compound propositions. في هذا الباب سوف ندرس المؤثرات المنطقية التالية:

- مؤثر النفي negation operator
- مؤثر الدمج conjunction operator
- مؤثر الفصل disjunction operator

- مؤثر الاستنباط implication operator
- مؤثر الاستباط المزدوج bidirectional operator

1- **مؤثر النفي** negation operator (يسمى ايضا مؤثر العكس): هو مؤثر ينفي الجملة المنطقية p (ونرمز له ¬p وأحيانا نستخدم الرمز p ~ أو NOT p بنفس المعنى) وهو **مؤثر أحادي** unary operator لأنه يؤثر على العبارة المنطقية الواحدة فيغير قيمتها من T **إلى** F **أو من** F **إلى** T.

ويمكن تلخيص ذلك فيما يعرف **بجدول الصواب** **Truth Table**.

لكل عملية منطقية يوجد جدول صواب يبين جميع القيم التي يمكن أن تعين للمتغير وما يقابل ذلك نتيجة هذه العملية. ومنه نستطيع حساب القيمة المنطقية لعبارة مركبة من عبارات بسيطة .

جدول الصواب للعبارة ¬p

p	¬p
T F	F T

2- المؤثر AND (مؤثر دمج conjunction operator)

كمثال آخر للمؤثرات المنطقية ندرس المؤثر AND (يسمى مؤثر دمج أو وصل conjunction operator أو رابط دمج conjunction connective) وهو مؤثر ثنائي binary operator لأن هذا المؤثر

المنطقـي (ونرمـز لـه بـالرمز ∧) يـؤثر علـى فرضـيتين p ، q كمـا يبـين جـدول الصواب التالي:

جدول صواب AND

p	q	p^q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

حيث نلاحظ في هذا الجدول أن p^q لا تكون صائبة إلا إذا كان كلا من العبارة p و q صائبة.

3- المؤثر OR (مؤثر **الفصل** Disjunction operator)

المؤثر الثالث الذي ندرسه في هذا الباب هو المؤثر OR بمعنـى أو (ويسمى مـؤثر **الفـصل** Disjunction operator أو رابـط الفـصل disjunction connective) ونرمز لهذا المؤثر المنطقي بالرمز ∨ وهو يؤثر على العبارتين المنطقيتين p ، q كما يلي :

جدول OR

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

حيث نلاحظ في هذا الجدول أن ناتج فصل عبارتين دائما True إلا إذا كان كلا العبارتان False.

أمثلة :

اكتب الجمل التالية باستخدام المتغيرات المنطقية:

1. اليوم جمعة والسماء صافية .
2. عادل مجتهد وذكي .
3. سوف يأتي أحمد عاجلا أو آجلا .

الحل:

1- " اليوم جمعة " = p

"السماء صافية" = q

"اليوم جمعة والسماء صافية" = $p \wedge q$

2- "عادل مجتهد" = p

"عادل ذكي " = q

"عادل مجتهد وذكي " = $p \wedge q$

3- "سوف يأتي أحمد عاجلا " = p

"سوف يأتي أحمد آجلا" = q

"سوف يأتي أحمد عاجلا أو آجلا" = $p \vee q$

<u>ملاحظة :</u>

استخدام المؤثر $\vee$ يعني أن احدى العبارتين p ، q يكفي أن تكون صائبة TRUE لكي يكون الناتج صائبا TRUE . وإذا كان كلاهما صائبا TRUE فان الناتج يكون أيضا صائبا TRUE .

في الحقيقة يوجد نوعان من المؤثر OR هما :

1- "أو" الشاملة Inclusive OR

2- "أو" القاصرة Exclusive OR

الأول هو OR أما الثاني فيرمز له عادة بالرمز $\oplus$ أو XOR (في لغات البرمجة).

في النوع الشامل (inclusive disjunction أي OR) إذا كان p أو q أو كلاهما TRUE فان $p \vee q$ تكون TRUE (ونرمز لها $\vee$).

وأما في النوع القاصر Exclusive disjunction (أي ⊕) إذا كان p أو q (ولكن ليس كلاهما) TRUE فان $p \oplus q$ تكون TRUE ، وإلا فإنها FALSE وذلك حسب الجدول التالي :

Exclusive OR (XOR)

p	q	$p \oplus q$
T	T	**F**
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عندما نستعمل "أو" في لغتنا العادية، عادة ما تعرف هل المقصود أو القاصرة أم أو الشاملة من السياق.

مثال : عندما تقول "سأذهب غدا لزيارة صديقي أو سأبقى في البيت للمذاكرة" فإنك تقصد أو القاصرة لأنك ستعمل أحد الأمرين وليس كلاهما.

وعندما يقول لك مدير الشركة التي تتقد اليها بطلب عمل " نريد خبرة 3 سنوات أو يزيد عمرك عن 25 سنة." فإنه يقصد أو الشاملة بمعنى أن أحد الشرطين أو كلاهما كافي.

وعندما يقول لك صاحب المطعم : "الشربة أو السلطة مجانا" ، هل يقصد أو الشاملة أم القاصرة ؟

طبعا هو يقصد " إما الشربة أو السلطة مجانا وليس كلاهما". أي أن "أو" هنا هي القاصرة exclusive وليس الشاملة inclusive.

<u>**ملاحظة :**</u> بصورة عامة في اللغة العربية عندما نستخدم "أو" فإننا نقصد عادة أو الشاملة inclusive ، مثل قولنا (إذا كنت مجتهدا أو ذكيا سوف تنجح) ، ولكن أحيانا نستخدم "أو" القاصرة (مثل قولنا تستطيع أن تذهب إلى السوق مشيا على الأقدام أو تركب السيارة) . وعندما تقول (إذا أمطرت أو كان الجو باردا فلن نذهب للنزهة) فإنك تقصد أحد الحالتين أو كلاهما (المطر وبرودة الجو) سوف يمنعك من النزهة .

4- المؤثر التضميني: implication

يسمى أيضا مؤثر الاستلزام أو المؤثر الاستنتاطي ونرمز له بالرمز → ويستخدم في عمليات الاستنباط ، أي أن :

$$p \to q$$

يعني أن q نستنبطها من p. أو بعبارة أخرى:

p تتضمن q (p implies q)

ويمكن تعريف هذا المؤثر من الجدول التالي Implication Truth Table :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظة :

في العبارة $q \to p$ تسمى p بالفرضية hypothesis و q بالنتيجـة conclusion.

ويمكن التعبير عن $q \to p$ لغويا بإحدى الطرق التالية :

باللغة الانجليزية	باللغة العربية
1. If p then q	إذا p كانت TRUE فان q أيضا TRUE
2. p implies q	p تعني q
3. p is sufficient condition for q	الشرط p كافي لتحقيق q
4. q whenever p	q تكون TRUE كلما كانت p TRUE
5. q is necessary for p	q شرط ضروري لتحقق p

لاحظ أن $p \rightarrow q$ تكافئ $\neg q \rightarrow \neg p$ (ويمكن اثبات ذلك من جدول الصواب) لهذا السبب فإن q هي شرط ضروري لتحقق p كما في الصف الأخير من الجدول.

لاحظ في جدول الصواب للمؤثر التضميني أن الناتج دائما true إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون p=false و q=true فإن الناتج في هذه الحالة يكون false. أما عندما تكون q=false فإن الناتج يكون true مهما كانت قيمة p ، ويمكن تفسير ذلك كما يلي:

إذا قلت (إذا نجحت سوف أعمل لكم حفلة) فإنك لم تذكر ماذا ستعمل في حالة أنك لم تنجح. ربما تعمل حفلة أو لاتعمل. في كلتا الحالتين لم تخلف وعدك وتكون الجملة التي قلتها صحيحة.

مثال : بناء على القاعدة : "إذا كنت ليبيّا فأنت إفريقي"

هل يمكن أن تكون إفريقيا إذا كنت ليس ليبيّا؟

الإجابة نعم فأنت يمكن أن تكون مصريا مثلا.

هل يمكن أن تكون لست ليبيّا ولست إفريقيا؟

الإجابة أيضا نعم فقد تكون هنديا مثلا.

هذه الاحتمالات كلها واردة ، ولكن هل يمكن أن تكون ليبيّا ولست إفريقيا؟

الإجابة طبقا للقاعدة المذكورة "لا" .

أي أننا إذا وضعنا

"أحمد ليبي" = p ، "أحمد إفريقي" = q

فانه يوجد لدينا 4 احتمالات :

1- $p = T$, $q = T$, $(p \to q) = T$
2- $p = F$, $q = T$, $(p \to q) = T$
3- $p = F$, $q = F$, $(p \to q) = T$
4- $p = T$, $q = F$, $(p \to q) = F$

حيث نلاحظ أن الاستنباط دائما True إلا في الحالة الأخيرة التي فيها

$p = T$, $q = F$, $(p \to q) = F$.

أي لا يمكن أن تكون الفرضية صائبة والنتيجة خاطئة.

مثال : في لغة باسكال عندما نكتب

```
If p then s
```

فإننا نطلب من الحاسوب أن ينفذ الجملة s عندما تكون p=True. فمثلا بعد تنفيذ الجمل التالية :

```
x:=0 ;
If (2+2 = 4) then x:= x+1;
```

ماذا ستكون قيمة x ؟

بما أن القيمة المنطقية للعبارة 4 = 2+2 هي TRUE فان الجملة

x:= x+1;

يتم تنفيذها بإضافة 1 إلى x (أي باضافة 1 الى 0) ويكون الناتج

$x = 0+1 = 1$

5-مؤثر الاستباط المزدوج Bidirectional Proposition

نرمز لهذا المؤثر بالسهم ذي الاتجاهين على النحو :

$p \leftrightarrow q$

وهو يعني

p صائبة إذا وفقط إذا q صائبة.

وأيضا

p خاطئة إذا وفقط إذا q خاطئة.

باختصار فإن المؤثر $\leftrightarrow$ يعني: إذا وفقط إذا if and only if .

بتعبير آخر نقول أن p هو شرط ضروري وكافي للشرط q .

p is a necessary and sufficient condition for q.

والجدول التالي يبين القيم المنطقية للاستنباط المزدوج :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

لاحظ أن :

$p \leftrightarrow q$ تكافئ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

مثال : اكتب الجملة التالية :

" تكون x^2 سالبة إذا وفقط إذا كانت x عددا تخيليا"

باستخدام المتغيرات المنطقية.

الحل :

دع

p = "سالبة x^2 "

q = "عدد تخيلي x "

بذلك تكون الجملة المنطقية المطلوبة هي

$p \leftrightarrow q$

مثال : اكتب الجملة التالية بالرموز :

"يعتبر الطالب ناجحا في المقرر فقط إذا تحصل على درجة 50 أو أكثر"

الحل : دع

p = "يعتبر الطالب ناجحا "

q = "تحصل الطالب على درجة 50 "

r = " تحصل الطالب على درجة أكبر من 50"

وبالتالي فان الجملة المذكورة تكافئ الآتي :

$p \leftrightarrow q \vee r$

1.4 العبارات المركبة Compound Propositions

في العبارة المركبة يوجد لدينا أكثر من مؤثر منطقي. ولذلك من المهم أن نعرف أي مؤثر يتم تنفيذه قبل الآخر. مثلا إذا صادفتنا عبارة مركبة مثل :

$$\neg p \land q$$

فهل هي تعني $(\neg p) \land q$

أم تعني $\neg(p \land q)$

الإجابة : المعنى الأول هو الصحيح وذلك حسب قانون الأولويات priorities في المنطق الرياضي كما سنسردها فيما بعد (المؤثر الأحادي تكون له دائما الأسبقية على المؤثر الثنائي).

أولويات التنفيذ : في لغات البرمجة يتم تنفيذ المؤثرات NOT ، AND ، OR على الترتيب التالي :

1. المؤثر NOT
2. المؤثر AND
3. المؤثر OR و XOR

في حالة تساوي الأسبقية (مثل OR , XOR) تعطى الأسبقية من اليسار إلى اليمين. وفي حالة استعمال الأقواس ( ) تعطى الأسبقية للعملية بداخلها على أي عملية أخرى.

مثال : ما هو ناتج تنفيذ البرنامج التالي بلغة باسكال ؟

```
PROGRAM LOGIC ;
```

```
VAR   p , q , r , s : BOOLEAN ;
BEGIN
          p := FALSE ;
          q := FALSE ;
          r := TRUE ;
          s := p  AND  q  OR  r ;
            WRITELN(s)
END .
```

الإجابة : TRUE

والسبب هو أن التنفيذ يكون على النحو التالي:

```
s = (p  AND  q) OR  r
  = (TRUE  AND  FALSE) OR (TRUE)
  = FALSE  OR  TRUE
  =    TRUE
```

أي أن AND تسبق OR في التنفيذ.

مثال : ما هو ناتج تنفيذ البرنامج التالي بلغة باسكال؟

```
 PROGRAM LOGIC ;
VAR  p , q , r , s : BOOLEAN ;
BEGIN
```

```
        p := TRUE ;
        q := FALSE ;
        r := TRUE ;
        s := p  AND  NOT q  OR  r ;
WRITELN (s) ;
END .
```

الإجابة : TRUE

والسبب كما يلي :

تعطي الأسبقية (NOT ثم AND ثم OR) أي :

```
s:= p  AND (NOT  q)  OR r ;
  = (FALSE  AND  TRUE) OR  TRUE
  = FALSE OR TRUE
  = TRUE
```

حيث نلاحظ ما يلي:

تنفذ (NOT q) في هذه العبارة قبل غيرها . أي أن NOT لها الأسبقية على OR و AND. وتوصف NOT بأنها مؤثر أحادي لأنها تدخل على قيمة منطقية واحدة ، أما OR و AND فهي مؤثرات ثنائية لأنها تؤثر على قيمتين منطقيتين .

1.5 مؤثرات البت Bit Operators

البت bit هي اختصار للكلمتين :

خانة ثنائية= **Bi**nary Digi**t**

وهي لها قيمتان محتملتان هما 0 أو 1 .

وأول من استخدم هذا المصطلح هو : جون توكي John Tukey سنة 1946.

لاحظ إمكانية تمثيل المتغيرات المنطقية باستخدام البت حيث نضع

False = 0
True = 1

تعريف : النضيد الثنائي bit string

هو عبارة عن سلسلة من الأرقام الثنائية .

مثلا : العدد 01001001

هو نضيد ثنائي به 8 خانات ثنائية .

الآن يمكننا تلخيص المؤثرات المنطقية التالية

$\vee \quad \wedge \quad \oplus$

بالجدول التالي حيث 0 يعني FALSE و 1 يعني TRUE .

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

1	1	1	1	0

هنا نلاحظ أن x , y هي متغيرات منطقية لها قيمة 0 أو 1 .

مثال: دع

$x = 1011$
$y = 1101$

أوجد :

$x \oplus y$, $x \wedge y$, $x \vee y$

ملاحظة : تسمى المؤثرات في حالة أن x , y نضائد ثنائية كما يلي :

$\wedge$ Bitwise AND
$\vee$ Bitwise OR
$\oplus$ Bitwise XOR

الحل:

$$
\begin{array}{ll}
0110 & \\
\underline{1101} & \\
0100 & \rightarrow \text{Bitwise AND} \\
1111 & \rightarrow \text{Bitwise OR} \\
1011 & \rightarrow \text{Bitwise XOR}
\end{array}
$$

1.7 تمارين1 Exercises 1

(1) هل تعتبر الجمل التالية منطقية ؟ في حالة نعم أوجد قيمتها المنطقية .

a) العلم نور.

b) بيروت عاصمة العراق.

c) $2 + 3 = 5$

d) $5 + 7 = 11$

e) ماذا تعرف عن المنطق؟

f) أجب عن جميع الأسئلة

g) $x + y$

(2) اكتب نفي الجمل التالية (negation)

a) اليوم هو الاثنين.

b) لا يوجد تلوث في البيئة.

c) $2 + 3 = 5$

d) الجو في الشتاء بارد .

(3) د ع

p = " ذاكرت دروسي جيدا"

q= " نجحت بتفوق"

عبر باللغة العربية عن الأتي :

a) $\neg p$
b) $p \vee q$
c) $p \rightarrow q$
d) $p \wedge q$
e) $p \wedge \neg q$
f) $\neg p \rightarrow \neg q$
g) $\neg p \wedge \neg q$
h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

(4) د ع

p = "الجو بارد"

q = "السماء صافية"

أكتب الجمل التالية من اللغة العربية إلى جمل رمزية

a) الجو بارد والسماء صافية
b) الجو بارد والسماء غير صافية
c) الجو ليس باردا والسماء ليست صافية
d) الجو بارد أو السماء صافية

e) إذا كانت السماء غير صافية فإن الجو يكون باردا

f) شرط ضروري وكافي لأن يكون الجو باردا أن تكون السماء غير صافية.

(5) هل التضمين التالي T أم F ؟

a) If $1 + 1 = 2$ then $2 + 2 = 5$
b) If $1 + 1 = 2$ then $2 + 2 = 4$
c) If $1 + 1 = 3$ then $2 + 2 = 5$
d) If cows can fly then $1 + 1 = 2$
e) If $2 + 2 = 4$ then $1 + 2 = 3$

(6) هل OR في الجمل التالية inclusive أم exclusive ؟

(ا) لكي تكون مبرمجا جيدا يجب أن تدرس الرياضيات أو الفيزياء.

(ب) لكي تشتري سيارة يجب أن تدفع الثمن دفعة واحدة أو بالتقسيط .

(ج) هذا البيت معروض للبيع أو الإيجار.

(7) كوّن جدول الصواب Truth Table للعبارات المنطقية المركبة التالية :

a) $p \wedge \neg p$
b) $p \vee \neg p$
c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$
d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
g) $p \oplus p$
h) $p \oplus \neg p$

i) $p \oplus \neg q$
k) $\neg p \leftrightarrow q$

(8) إذا كانت $x = 1$ قبل تنفيذ الجمل التالية . فما هي قيمة x بعد التنفيذ

a) If 1 + 2 = 3 then x:= x + 1 ;
b) If (1 + 1 = 3) OR (2 + 2 = 3) then x:= x + 1 ;
c) If (2 + 3 = 5) AND (3 + 4 = 7) then x:= x + 1 ;
d) If (1 + 1 = 2) XOR (1 + 2 = 3) then x:= x + 1 ;
e) If x < 2 then x:= x + 1 ;

(9) أوجد قيمة bitwise OR
وقيمة bitwise AND
وقيمة bitwise XOR
لما يلي:

a) 101 1110 , 010 0001
b) 1111 0000 , 1010 1010
c) 00 0111 0001 , 10 0100 1000
d) 11 1111 1111 , 00 0000 0000

10) اكتب برنامجا فرعيا على شكل دالة function تقوم بعمل المؤثر التضميني implication.

1.7 التوافق والتناقض Tautology & Contradiction

تعريف (1) العبارة المنطقية المركبة Compound Proposition التي يكون ناتجها دائما صوابا TRUE مهما كانت قيم مكوناتها تسمى توتولوجي (أو توافق) Tautology .

تعريف (2) العبارة المنطقية المركبة التي يكون ناتجها دائما خاطئا FALSE مهما كانت قيم مكوناتها تسمى تناقضا Contradiction.

A **tautology** is a compound proposition which is true no matter what the truth values of its simple components.

A **contradiction** is a compound proposition which is false no matter what the truth values of its simple components.

مثال (1): هل تعتبر العبارة المركبة (p v (¬p توتولوجي ؟

الإجابة : نعم، فمهما كانت قيمة p فإن الناتج قيمته True كما يبين الجدول التالي:

p	¬p	p v (¬p)
T F	F T	T T

مثال(2): هل تعتبر العبارة التالية $p \wedge \neg p$ توتولوجي ؟

الإجابة : لا، بل هي تناقض لأن ناتج العبارة $p \wedge \neg p$ دائما FALSE كما يبين الجدول التالي:

p	¬p	p ∧ ¬p
T	F	F
F	T	F

أي أن هذه العبارة هي تناقض contradiction.

1.8 التكافؤ المنطقي Logical Equivalence

تعتبر العبارتان المنطقيتان متكافئتين منطقيا إذا كانت نتيجتهما دائما متساوية مهما كانت قيمة الفرضيات المبنية عليهما.

Two propositions are said to be **logically equivalent** if they have identical truth values for every set of truth values of their components.

ويمكن استخدام الرمز ⇔ للتعبير عن التكافؤ المنطقي ولكن أحيانا نستخدم العبارة $P \equiv Q$ لتعني أن P تكافئ Q .

ويوجد في علم المنطق العديد من قوانين التكافؤ المهمة نورد بعضا منها فيما يلي.

قوانين دي مورغان De Morgan's laws

القانون الأول $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

القانون الثاني $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

يمكن اثبات القانونين باستخدام جدول الصواب حيث نحصل على عمودين متطابقين .

مثلا الجدول التالي يبين صحة القانون الثاني:

p	q	¬(p v q)	¬p	¬q	¬p∧¬Q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

نلاحظ في هذا الجدول أن عمود العبارة $\neg(p \vee q)$ يطابق عمود العبارة $\neg p \wedge \neg q$ (وقد تم تظليلهما في الجدول) لذلك فالعبارتان متكافئتان.

مثال على قانون دي مورغان الأول :

انفي العبارة التالية :

"علي عمره أكبر من 20 سنة وأقل من 30 سنة"

الإجابة: النفي هو

"علي عمره أقل من (أو يساوي) 20 سنة أو أكبر من (أو يساوي) 30 سنة"

نلاحظ هنا عند النفي أن "و" قد تحولت إلى "أو" ، فإذا وضعنا:

p = "عمر علي أكبر من 20"

q = "عمر علي أقل من 30"

فان العبارة الأصلية هي:

$$p \wedge q$$

وعبارة النفي هي:

$$\neg p \vee \neg q$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة مثال على قانون دي مرغان De Morgan الثاني .

مثال : بين أن العبارة $p \rightarrow q$ والعبارة $\neg p \vee q$ متكافئتان .

الإجابة : نحسب الجدول التالي للعبارتين

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg P$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T

F	F	T	T	T

نلاحظ في هذا الجدول أن عمود $p \rightarrow q$ وعمود $\neg p \vee q$ متكافئان.

ملاحظة : نستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ للدلالة على التكافؤ.

قوانين التوزيع Distributive law

القانون الأول $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

القانون الثاني $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

لإثبات القانون الأول ننشئ الجدول التالي :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

نلاحظ أن عمود $p \vee (q \wedge r)$ يكافئ عمود $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.9 تكافؤات أخرى مهمة :

(1) $\mathbf{p \wedge T \Leftrightarrow p}$

حيث $\Leftrightarrow$ هو رمز التكافؤ

(2) $p \vee F \Leftrightarrow p$

يسمى القانون (1) و (2) بقانون الوحدة identity law

(3) $p \vee T \Leftrightarrow T$

$p \wedge F \Leftrightarrow F$

(4) $p \vee p \Leftrightarrow p$

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

(5) commutative law قانون التبديل

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

(6) associative law قانون الدمج أو الترتيب

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow P \wedge (q \wedge r)$

$p \vee \neg p \Leftrightarrow True$ (7)

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow False$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (8)

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (9)

مثال(6) بين باستخدام قوانين التكافؤ أن :

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

تكافئ منطقيا

$\neg p \wedge \neg q$

الإثبات:

باستخدام قانون دي مورغان الثاني:

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

والآن باسخدام قانون دي مورغان الأول

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q)$

ولكن من قانون التوزيع فإن هذا يكافئ

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$$\Leftrightarrow \quad F \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال : دع

$p =$ "عثمان رجل غني"

$q =$ "عثمان رجل كريم"

هذا يعني أن :

$p \wedge q =$ "عثمان رجل غني وكريم"

$p \vee q =$ "عثمان رجل غني أو كريم"

من الواضح هنا أن :

$$p \wedge q \rightarrow p \vee q$$

ولكن العكس غير صحيح .

مثال(7) بين أن العبارة :

$$p \wedge q \rightarrow (p \vee q)$$

توتولوجي.

أي أن العبارة $p \wedge q$ إذا كانت قيمتها TRUE فان من تحصيل الحاصل أن تكون $p \vee q$ أيضا TRUE.

الإثبات :

يمكن إثبات ذلك باستخدام جدول الصواب ولكن هنا نستخدم قوانين التكافؤ

$$(p \land q) \rightarrow (p \lor q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \land q) \lor (p \lor q)$$

وذلك ما تم إثباته في مثال(4).

ولكن من قانون دي مورغان الأول نحصل على:

$$\neg(p \land q) \lor (p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \lor (p \lor q)$$

والآن من قانون الدمج :

$$\Leftrightarrow (\neg p \lor p) \lor (\neg Q \lor q)$$

$$\Leftrightarrow T \lor T$$

$$\Leftrightarrow T$$

أي أن ناتج العبارة دائما TRUE مهما كانت q , p

أي أن العبارة من نوع توتولوجي .

1.10 تمارين (2)

(1) استخدم جدول الصواب Truth Table لإثبات ما يلي :

a) $p \wedge T \Leftrightarrow p$

b) $p \vee F \Leftrightarrow p$

c) $p \wedge F \Leftrightarrow F$

d) $p \vee T \Leftrightarrow T$

e) $p \vee p \Leftrightarrow p$

f) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

(2) استخدم جدول الصواب لتحقيق قانون التوزيع :

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

(3) بين أن التضمينات التالية implications من نوع توتولوجي:

a) $(p \wedge q) \rightarrow p$
b) $p \rightarrow (p \vee q)$
c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(أ) باستخدام جدول الصواب.

(ب) بدون استخدام جدول الصواب.

(4) حقق القوانين التالية (التي تسمى قوانين الامتصاص absorption Laws)

$$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$$

$$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$$

(5) هل العبارة المنطقية:

$$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$$

من نوع توتولوجي ؟

(6) بين أن العبارة: $\neg p \leftrightarrow q$

والعبارة: $p \leftrightarrow \neg q$

متكافئتان منطقيا.

(7) بين أن العبارة: $p \rightarrow q$

تكافئ منطقيا العبارة:

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

(هذا يعني أن العبارة $p \rightarrow q$ تكافئ مقلوب النفي)

(8) استخدم خاصية (العبارة $p \rightarrow q$ تكافئ مقلوب نفيها) لإثبات أن "إذا كان مربع العدد فرديا فان العدد نفسه يكون فرديا"

1.11 الدالة المنطقية

الدالة $P(x)$ هي عبارة منطقية تعتمد على قيمة المتغير المستقل x .

أي أن:

$$P : X \rightarrow \{ T , F \}$$

حيث X هو نطاق الدالة P ومداها هو الفئة {T, F} حيث T ترمز ل True و F ترمز ل False.

مثال(1) إذا كانت P(x) دالة منطقية تعني "x > 3" حيث x عدد حقيقي، فما هي قيمة P(3) ، P(4) ؟

الإجابة:

P(3) ="3>3" = False
P(4) ="4>3"= True

لاحظ أن نطاق الدالة المنطقية قد يكون جميع الأعداد الحقيقية أو الأعداد الصحيحة وقد يكون لها أكثر من متغير مستقل واحد.

مثال(2) : دع Q(x,y) تعني "x = y+ 3" حيث x و y أعداد صحيحة. ما قيمة Q(1,2) ، Q(3,0) ؟

الإجابة :

Q(1,2) = "1 = 2 + 3" = False
Q(3,0) = " 3 = 0 + 3" = True

مثال(3): إذا كانت R(x, y ,z) تعني x + y = z
فما قيمة R(1, 2 ,3) ؟

الإجابة : R(1,2,3) = " 1 + 2 = 3"= True

1.12 المقياس الشامل والوجودي

تسمى العبارة $\forall x\ P(x)$ بالمقياس الشامل universal quantification وهي تعني (لجميع قيم x في نطاق معين فإن الدالة المنطقية $P(x)$ صائبة True).

مثال(4): دع $p(x)$ تعني "$x + 1 > x$" ما هي قيمة $\forall x\ P(x)$ ؟ حيث x تنتمي لفئة الأعداد الحقيقية؟

الإجابة:

بما أن x تعني عدد حقيقي real number فان

$$\forall x\ P(x) = True$$

لأن إضافة 1 للعدد يجعله أكبر مما كان.

مثال(5): دع $Q(x)$ تعني "$x < 2$" ما هي قيمة المقياس $\forall x\ Q(x)$ حيث x رقم حقيقي؟

الإجابة :

$$\forall x\ Q(x) = False$$

لأن بعض قيم x (مثلا $x=3$) لا تحقق المقياس المطلوب.

مثال(6): ما قيمة المقياس $\forall x\ P(x)$ حيث $P(x)$ هي الجملة "$x^2 < 10$"

وأن النطاق هو الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 4 ؟

الإجابة :

النطاق هنا هو الأعداد {1,2,3,4} حيث نلاحظ أن

P(1) = True , P(2) = True , P(3) = True , P(4) = False

ولكن لكي تكون $\forall x\, P(x) = True$ يجب أن تكون :

P(1) ، P(2) ، P(3) ، P(4) جميعها True .

لذلك فان $\forall x\, P(x) = False$

المقياس الوجودي existential quantification

هو المقياس الذي يعبر عن وجود عنصر واحد x على الأقل بحيث تكون الدالة المنطقية P(x) صائبة ، أي P(x) = True

ونعبر عن ذلك بالرمز التالي: $\exists x\, P(x) = True$

مثال(7): دع Q(x) تعني x = x + 1

ما هي قيمة المقياس $\exists x\, Q(x)$ حيث x رقم حقيقي

الإجابة :

$\exists x\, Q(x) = False$

لأنه لا يوجد رقم حقيقي يحقق هذا المقياس ، أي لا يوجد رقم حقيق يساوي نفسه زائد 1 .

مثال(8): دع $C(x)$ تعني أن " **x** لديه حاسوب "

$F(x ,y)$ تعني " **x , y** صديقان"

حيث x ، y تنتمي إلى فئة طلبة الكلية ، ما معنى:

$$\forall x\ (C(x) \vee \exists y\ (C(y) \wedge F(x ,y)))$$

الإجابة:

هذه الجملة تعني أن كل طالب في المعهد أما أن يكون لدبه حاسوب أو لديه صديق عنده حاسوب.

مثال(9): باستخدام المقاييس عبر عن الجمل التالية :

(أ) "بعض الطلبة في هذا الفصل زاروا بنغازي "

(ب) "كل طالب في هذا الفصل قد زار إما الزاوية أو بنغازي"

الإجابة:

الفئة الشاملة هي جميع الطلبة في الفصل

x : طالب في الفصل

$M(x)$ = "x زار بنغازي"

$C(x)$ = "x زار الزاوية"

(أ) لاحظ أن كلمة "بعض" تعني وجود واحد على الأقل، لذلك نكتب الجملة كما يلي:

$\exists x\, M(x)$ = "يوجد طالب واحد على الأقل قد زار بنغازي"

(ب) $\forall x\, (M(x) \vee C(x))$

= "جميع الطلبة إما زاروا الزاوية أو بنغازي"

1.13 النفي NEGATION

مثال(1): ما هو نفي الجملة

"كل طالب في هذا الفصل درس الكيمياء"

لاحظ أن هذه الجملة يمكن كتابتها على النحو $\forall x\, P(x)$

حيث $P(x)$ تعني أن x درس الكيمياء.

نفي هذه الجملة هو $\exists x \neg P(x)$

بمعنى أن

"يوجد طالب واحد على الأقل في هذا الفصل لم يدرس الكيمياء"

أي

هذا المثال يوضح التكافؤ التالي

$$\neg\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$$

مثال(2):

ما هو نفي الجملة

"يوجد طالب واحد على الأقل في هذا الفصل قد درس الكيمياء"

الإجابة:

"كل الطلبة في هذا الفصل لم يدرسوا الكيمياء"

أي أن لدينا التكافؤ التالي:

$$\neg \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$$

حيث "x درس الكيمياء" = P(x)

1.14 تمــارين (3)

1- دع P(x) تعني الجملة $x \le 4$ ما هي قيمة :

a) P(0)
b) P(4)
c) P(6)

2- دع Q(x,y) تعني "x عاصمة y" ما هي قيمة :

a) Q(Cairo , Egypt)
b) Q(Tripoli , Tunis)
c) Q(New York , USA)

3- إذا كان P(x) تعني "x طالب ممتاز"

ماذا تعني الجمل التالية :

a) $\exists x\, P(x)$

b) $\forall x\, P(x)$

c) $\exists x \neg P(x)$

d) $\forall x\, \neg P(x)$

علما بأن الفئة الشاملة هي طلبة الكلية.

4- دع $W(x , y)$ تعني أن "x visited y" أي "x قد زار y"

حيث x تنتمي إلى فئة طلبة الكلية، y تنتمي إلى فئة مواقع الانترنت.

ماذا تعني الجمل التالية :

.a) W(Ali , www.fatahu.edu).

b) $\exists x$: W (x , www.yahoo.com)

c) $\exists y$: W (Omar , y)

d) $\exists y\, (W(Anas, y) \wedge W(Adel, y))$

e) $\exists y\, \forall z\, (y \neq Ahmed \wedge (W(Ahmed,z) \rightarrow W(y,z)))$

f) $\exists x\, \exists y\, \forall z\, ((x \neq y) \wedge (W(x,z) \leftrightarrow W(y,z)))$

5- دع $P(x)$ تعني الجملة "x يتكلم الروسية"

، $Q(x)$ تعني "x يعرف لغة ++C"

حيث x طالب في الكلية .

عبر عما يلي بالروابط المنطقية:

(أ) يوجد طالب بالكلية يعرف لغة ++C ويتكلم الروسية.

(ب) يوجد طالب بالكلية يتكلم الروسية ولكنه لا يعرف لغة ++C

(ج) كل طالب في الكلية إما أنه يتكلم الروسية أو يعرف لغة ++C

(د) لا يوجد طالب في الكلية يتكلم الروسية أو يعـرف لغة ++C

6- دع

$S(x)$ تعني الجملة "x طالب"

$F(x)$ تعني الجملة "x عضو هيئة تدريس"

$A(x, y)$ تعني "x سأل y سؤالا"

استخدم quantifiers المقاييس للتعبير عن :

(أ) سأل طارق الأستاذ مصطفى سؤالا .

(ب) كل طالب سأل الأستاذ يحيى سؤالا.

(ج) كل عضو هيئة تدريس إما أنه سأل الأستاذ منصور سؤالا أو أنه تم توجيه سؤال إليه من قبل الأستاذ جمال.

(د) بعض الطلبة لم يسألوا أي عضو هيئة تدريس أي سؤال.

(هـ) يوجد عضو هيئة تدريس لم يتم سؤاله من قبل أي طالب.

7- ما هو نفي الجمل التالية:

(أ) $\exists x\, P(x)$

(ب) $\exists x\, \neg P(x)$

(ج) $\forall x\, P(x)$

(د) $\forall x\, \neg P(x)$

اكتب معنى هذه الجمل إذا كانت P(x) تعني أن "x يدرس علم الحاسوب" وأن الفئة الشاملة التي ينتمي إليها x هي طلبة كلية الدعوة الإسلامية.

اختبار

س1 دع

P = " اليوم جمعة "

Q = " 5 = 3 + 2 "

ما قيمة العبارة المنطقية التالية :

$P \rightarrow Q$

===============

س2 ما قيمة x بعد تنفيذ الجزء التالي بلغة باسكال:

```
x:=2;
If 2+2=4 then x:=x+3;
```

==============

س3 اثبت أن

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\text{NOT } p \vee q)$

=============

س4 أكمل مستخدما قوانين دي مورغان

ا- العبارة $NOT (p \wedge q)$ تكافئ ----------------------

ب- العبارة $NOT (p \vee q)$ تكافئ ----------------------

============

س5 اكتب العبارة التالية باستخدام الرموز

أ- " اسماعيل لعيب كرة قدم أو كرة سلة وليس كلاهما "

ب- " كل الطلبة مجتهدون "

ت- "بعض الأطباء مخلصون"

ث- " لا يوجد طلبة ليبيون في الكلية "

===========

س6 اكتب نفي العبارات في س5 باستخدام الرموز وباللغة العربية

===========

س7 دع

P(x) = " x يملك جهاز محمول "

Q(x ,y) = " x صديق y "

ما معنى العبارة التالية:

$$\forall x\ P(x) \vee \exists y\ (Q(x ,y) \wedge P(y))$$

علما بأن الفئة الشاملة هي طلبة الكلية.

=========

س8 اكتب برنامجا لطباعة جدول الصواب للعبارة المنطقية

$$P \wedge (P \vee Q)$$

==